5 – topologia (metryki)

27.X.2014r.

Definicja (D1). Jeśli w pewnej przestrzeni X można wprowadzić funkcję rzeczywistą (dwóch zmiennych) $X^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho(x, y)$, spełniającą poniższe aksjomaty, to powiemy, że jest ona *przestrzenią metryczną*. Funkcję tę nazwiemy zaś *metryką* na X.

A1. $\rho(x, y) \geq 0$, przy czym $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (dodatnia określoność);

A2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (symetryczność);

A3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (nierówność trójkąta; „pomiędzy dwoma punktami droga jest zawsze dłuższa z międzylądowaniem, niż bezpośrednio”).

Metryka (jak sama nazwa wskazuje) służy do mierzenia odległości pomiędzy dwoma punktami. Mając do dyspozycji metrykę, łatwo jest zdefiniować

Definicja (D2). *Standardowym otoczeniem (kulą standardową)* o promieniu $\varepsilon > 0$ punktu x w przestrzeni metrycznej X nazywamy kulę o promieniu ε, tj. taki zbiór punktów $y \in X$, że $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Kula standardowa jest standardowym zbiorem otwartym w X. Dysponując zatem pojęciem metryki, a w konsekwencji i kuli standardowej, możemy wprowadzić pojęcia topologiczne „od końca”, tzn. definiując zbiór otwarty, jako pewną sumę kul, zaś otoczenie punktu x, jako zbiór, w którym zawiera się pewna kula standardowa wokół x. A zatem rodzina *kul standardowych zadaje topologię na przestrzeni.*

Tak właśnie postąpiono milcząco w wypadku definicji rzeczywistej granicy ciągu (zajęcia 1 o logice):

$$\mathbb{R} \ni g \ =: \lim_{n \to \infty} x_n \ \Leftrightarrow \ \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 : \ |x_n - g| < \epsilon \ ,$$

gdzie rolę metryki (odległości) na osi $\mathbb{R}$ pełni $|x - y|$. Czytelnik sprawdzi, że jest to faktycznie dobrze zdefiniowana metryka.

W rzeczywistości, granicę ciągu można zdefiniować w dowolnej przestrzeni topologicznej, zamiast kuli standardowej posługując się otoczeniem punktu:

$$X \ni g \ =: \lim_{n \to \infty} x_n \ \Leftrightarrow \ \forall \, otoczenia \, O \, punktu \, g \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 : \ x_n \in O \ .$$

Takie zatem pojęcia, jak granica ciągu i ciągłość funkcji, można rozpatrywać w zupełnym **oderwaniu** od pojęcia odległości, tzn. ...nie wprowadzając go wcale. Niech Czytelnik w milczeniu zmierzy się z tym nowym, topologicznym horyzontem myślowym. Widać, że te pojęcia są czymś ogólniejszym, niż się pierwotnie zdawało.

Kulą w $\mathbb{R}$ jest odcinek (przedział) obustronnie otwarty (x – ε; x + ε). W $\mathbb{R}^2$ jest to wnętrze koła, w $\mathbb{R}^3$ - wnętrze kuli.

Teraz Czytelnik skonfrontuje te fakty z posiadaną wiedzą na temat pomiaru odległości pomiędzy dwoma punktami w wymienionych przestrzeniach (a zatem z metryką Euklidesową) i potwierdzi, że tak właśnie wyglądają w nich kule standardowe.

Ćwiczenie (C1), czas: 12 minut. A jak wyglądałaby kula, dajmy na to o promieniu 2, wokół punktu (0; 0) na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, ale w nieco innej metryce, $\rho(A, B) := \max\{|x_A - x_B|; |y_A - y_B|\}$? Czytelnik naszkicuje tę kulę.

Ćwiczenie (C2), czas: 12 minut. Jeśli określimy obrót o pewien kąt jako operację na płaszczyźnie, która zachowuje (nie zmienia) odległości między punktami, to Czytelnik zechce naszkicować trasę, jaką pokonuje przy obracaniu zgodnie z ruchem wskazówek zegara o kąt 60° koniec odcinka o długości 4, jeśli oś obrotu przechodzi przez drugi jego koniec w punkcie (0; 0). Proszę zrobić to dla obu metryk: Euklidesowej najpierw, a potem dla tej zdefiniowanej w C1.

Dobra wiadomość: płaszczyzna $\mathbb{R}^2$, z jedną i drugą metryką, jest nadal tą samą przestrzenią topologiczną! Tzn., obie metryki (kule) zadają równoważną topologię. Poznaje się to po tym, że w każdą kulę Euklidesową można wpisać kulę C1, a w każdą kulę C1 można wpisać kulę Euklidesową. W konsekwencji – zadają one te same otoczenia punktów, a więc i topologię.

Ćwiczenie (C3), czas: 30 minut. Zadajmy metrykę

$$\mathrm{d}(A, B) := |\,\Delta x\,| + |\,\Delta y\,| \equiv |\,x_A - x_B\,| + |\,y_A - y_B\,|.$$

a) Sprawdzić, że jest to prawidłowa metryka.

b) Naszkicować brzeg kuli o promieniu 2 i środku w punkcie (1; 1);

c) Uzasadnić, że topologie $\mathbb{R}^2$; O(ρ z ćwiczenia C1) i $\mathbb{R}^2$; O(d) są równoważne.